На правах рукописи

ГРИГОРЕНКО Анна Александровна

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск 2003

Работа выполнена в ГОУВПО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р.Державина».

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент Жуковский Евгений Семенович

Официальные оппоненты — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Ченцов Александр Георгиевич

доктор физико-математических наук, профессор Дерр Василий Яковлевич

Ведущая организация — Российский университет дружбы народов

Защита состоится «___» ____________ 2004 г. в 14^{00} в ауд. 222. на заседании диссертационного совета К 212.275.04 в ГОУВПО «Удмуртский государственный университет» по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская 1 (корп. 4), E-mail: *elt@udman.ru*, *imi@uni.udm.ru*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан «___» ____________ 2003 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Петров Н.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время интенсивно изучаются включения, правая часть которых состоит из алгебраической суммы значений "хорошего" (имеющего замкнутые образы) и "плохого" (не обладающего свойством замкнутости и выпуклости значений) многозначных отображений. Такие включения называют возмущенными. Отметим, что все имеющиеся в настоящее время методы исследования (теорема Какутани, принцип сжимающих отображений) непосредственно применить для изучения вопросов существования решений таких возмущенных включений нельзя. В то же время к таким включениям сводятся многие задачи дифференциальных и интегральных включений, теории аппроксимации, управления и игр. Поэтому построение теории возмущений многозначных включений представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Основы теории возмущений заложены в работах А.И. Булгакова и Л.И. Ткача, в которых для случая, когда "хорошее" многозначное отображение имеет выпуклые замкнутые образы, рассмотрены вопросы существования решений возмущенных включений, топологические свойства множеств решений и квазирешений. Отметим, что доказательство этих свойств основывалось на теореме Майкла, с помощью которой доказывалось существование в некотором смысле "минимальной" непрерывной ветви у "хорошего" многозначного отображения с выпуклыми образами. В настоящей работе не предполагается, что "хорошее" многозначное отображение имеет выпуклые образы. Поэтому применить теорему Майкла для исследования такого возмущенного включения невозможно.

Цель работы. Целью работы является изучение условий существования решений возмущенных включений, а также топологических свойств множеств решений и квазирешений таких включений, приложение этих результатов к исследованию краевых задач для функционально - дифференциальных включений.

Общая методика исследования. Поставленные в диссертации вопросы исследуются с применением методов функционального анализа, теории функций вещественной переменной, дифференциальных уравнений и включений, теории многозначных отображений.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. В работе доказаны теоремы о существовании решений возмущенного включения, а также получены оценки близости решений к наперед заданной функции. Доказан принцип плотности и "бэнг - бэнг" принцип. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости множества решений возмущенного включения к внешним возмущениям. На основе теории возмущенных включений исследованы свойства решений краевых задач функционально-дифференциальных включений.

Апробация диссертации. Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 01-01-00140, грантом Министерства Образования РФ № Е 02-1.0-212.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на: научных конференциях "Державинские чтения –5"(Тамбов, 2000), Воронежских весенних математических школах "Понтрягинские чтения – 10 - 13"(Воронеж, 1999-2002), Воронежских зимних математических школах "Современные методы теории функций и смежные проблемы"(Воронеж, 1999, 2001, 2003), конференции молодых ученых (Тамбов, 1999-2003), Симпозиуме "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках"(Воронеж, 2000), международной конференции "Нелинейный анализ и функционально - дифференциальные уравнения"(Воронеж, 2000), Тамбовском городском семинаре по функционально -дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.И. Булгакова (Тамбов, 1999-2003), Всероссийской конференции "Общие проблемы управления и их приложения к математической экономике"(Тамбов, 2000), Всероссийской конференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и ее приложения"(Рязань, 2001), международной конференции "Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики", посвященной 100 летию А.Н. Колмогорова (Тамбов, 2003), Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством профессора Е.Л.Тонкова (2003).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в восемнадцати публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация объемом 108 страниц состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и библиографического списка, состоящего из 74 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводятся методика исследования и краткое содержание работы.

Приведем некоторые обозначения, используемые для формулировки основных результатов диссертации

Основные обозначения

$B_X[x,r]$ - открытый шар в метрическом пространстве X с центром в точке x и радиусом $r > 0$; $\overline{A}$ - замыкание множества A; A^ε - замкнутая ε - окрестность множества A; $F(\cdot,s)$ - s фиксировано и F рассматривается как функция лишь первого аргумента; $\rho_X(\cdot,\cdot)$ - расстояние в метрическом пространстве X и расстояние между точкой и множеством в этом пространстве; $h_X[\cdot,\cdot]$ - расстояние по Хаусдорфу в метрическом пространстве X; $\operatorname{co} A$ - выпуклая оболочка множества A, $\overline{\operatorname{co}}A = \overline{\operatorname{co} A}$; $\operatorname{ext} A$ - множество крайних точек множества A, $\overline{\operatorname{ext}}A = \overline{\operatorname{ext} A}$; R^n - n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$; $\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ - множество всех непустых, компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ - пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{U} \subset [a,b]$ - измеримое по Лебегу множество, $\mu(\mathcal{U}) > 0$, $\mu(\cdot)$ - мера Лебега) с нормой $||x||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|\,ds$; $\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ - множество всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\Omega(\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]])$ - множество всех непустых, выпуклых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ - пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\mathbf{C}^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$; $\operatorname{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$ - множество всех непустых компактов пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$; $||A||_X = \sup\limits_{a\in A} ||a||_X$, где A - подмножество нормированного пространства X.

Содержание первой главы носит вспомогательный характер. Здесь собраны основные определения и обозначения, а также утверждения, используемые в основном тексте. В § 1.1 приводятся общие сведения из функционального анализа и топологии. В § 1.2 собраны используемые сведения из теории многозначных отображений. В § 1.3 приводятся необходимые свойства выпуклых по переключению (разложимых) множеств. Главы 2, 3 содержат основные результаты диссертации. Приведем вкратце результаты изложенные в главе 2 и 3. Нумерация приводимых утверждений совпадает с их нумерацией в параграфах.

Во второй главе предлагаемой диссертации в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ рассматривается **возмущенное включение**

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ – многозначные операторы, линейный непрерывный интегральный оператор $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ определен равенством

$$(Vz)(t) = \int\limits_a^b V(t,s)z(s)ds, \qquad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Под **решением включения** (1) будем понимать элемент $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Пусть $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$ и $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = r_0 + Vw_0 + e, \tag{3}$$

где $e = q_0 - r_0 - Vw_0$. Предположим, что функция $k \in \mathbf{L}^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q_0)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{4}$$

а непрерывная функция $\nu : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)|k(s)ds + |e(t)|, \tag{5}$$

где $|V(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), $e \in \mathbf{C}^n[a,b]$ – функция в правой части равенства (3).

Будем говорить, что отображения $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством A**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям: для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняются неравенства:

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|\Gamma Z(x-y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}, \tag{6}$$

$$h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(x), \Psi(y)] \leqslant P\left(Z(x-y)\right); \tag{7}$$

для функции $\nu \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенной соотношением (5), сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu,\ \mathcal{A}^0 \nu = \nu,\ \mathcal{A}^i \nu = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\nu\right),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определен равенством

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int_a^b |V(t,s)|(\Gamma z)(s)ds + P(z),$$

а отображение $Z : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определено соотношением $(Zx)(t) = |x(t)|$. Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (8), то есть

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu. \tag{9}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть* $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$, $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (3). *Далее, пусть отображения* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством A. Тогда найдется такое решение* x *(* $x = v + Vz$, $v \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$ *) включения* (1), *для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t);$$

$$\|v - r_0\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant P(\xi(\nu));$$

при почти всех $t \in [a, b]$

$$|z(t) - w_0(t)| \leqslant k(t) + (\Gamma\xi(\nu))(t),$$

где $\nu, \xi(\nu), P, \Gamma, k$ *удовлетворяют соотношениям* (5), (9), (7), (6), (4), *соответственно.*

Будем говорить, что функция $x \in \mathbf{C}^n[a, b]$ является **квазирешением** включения (1), если найдется такой элемент $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность $z_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, что последовательность $x_i = v + Vz_i \to x$ в $\mathbf{C}^n[a, b]$ при $i \to \infty$.

Далее, будем считать, что если x – квазирешение включения и $x \in U \subset \mathbf{C}^n[a, b]$, то найдется такой элемент $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность $z_i \in \Phi(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ выполняется включение $x_i = v + Vz_i \in U$ и $x_i \to x$ в $\mathbf{C}^n[a, b]$ при $i \to \infty$.

Обозначим $\mathcal{H}$ – множество всех квазирешений включения (1).

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a, b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\overline{\mathrm{co}}(\Phi(x)). \tag{10}$$

Включение (10) будем называть **"овыпукленным" возмущенным включением** или просто **"овыпукленным" включением.**

Пусть H, H_{co} – *множества решений включений* (1), (10) соответственно. Справедливо следующее утверждение для квазирешений включения (1)

Теорема 2.3.2. *Пусть линейный непрерывный оператор* $V : \mathbf{L}^n[a, b] \to \mathbf{C}^n[a, b]$, *определенный равенством* (2), *переводит каждое слабо компактное в* $\mathbf{L}^n[a, b]$ *множество в предкомпактное множество пространства* $\mathbf{C}^n[a, b]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{H} = H_{\mathrm{co}}.$$

Определим отображение $\mathrm{co}\,\Phi : \mathbf{C}^n[a, b] \to \Omega(\Pi[\mathbf{L}^n[a, b]])$ равенством

$$(\mathrm{co}\,\Phi)(x) = \overline{\mathrm{co}}(\Phi(x)).$$

Теорема 2.3.4. *Пусть отображение* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ *непрерывно, а многозначные отображения* $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\mathrm{co}\,\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]])$ *полунепрерывны сверху по Хаусдорфу. Тогда множество* H_{co} *замкнуто в пространстве* $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Будем говорить, что отображения $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством B**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие неравенствам (6), (7), а также соотношениям $\Gamma(0) = 0$, $P(0) = 0$, и, кроме того, для любой функции $\widetilde{\nu} \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ из некоторой окрестности 0 ряд (8) сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$ и сумма ряда (8) непрерывна в 0, оператор V переводит каждое слабо компактное в $\mathbf{L}^n[a,b]$ множество в предкомпактное множество пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Теорема 2.3.5. *Пусть отображения* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством B. Тогда множество* $H \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{H} = H_{\mathrm{co}}, \tag{11}$$

где $\overline{H}$ *– замыкание в пространстве* $\mathbf{C}^n[a,b]$ *множества* H.

Отметим, что выполнение равенства (11) в последнее время называют принципом плотности.

Пусть многозначное отображение $\Delta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает свойством: при каждом фиксированном $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ отображение $\Delta(\cdot, x)$ измеримо и удовлетворяет равенству

$$\Phi(x) = \{y \in \mathbf{L}^n[a,b] : y(t) \in \Delta(t,x) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Будем называть отображение $\Delta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, **отображением порождающим оператор** $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$.

Определим отображение $\mathrm{ext}\,\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ равенством

$$(\mathrm{ext}\,\Phi)(x) = \{y \in \mathbf{L}^n[a,b] : y(t) \in \overline{\mathrm{ext}}(\mathrm{co}\,\Delta(t,x)) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V(\operatorname{ext}\Phi)(x). \qquad (12)$$

Пусть H_{ext} – *множество всех решений включения* (12).

Будем говорить, что множество H_{co} **разложимо по многозначным отображениям** Ψ, $\operatorname{co}\Phi$ или просто **разложимо**, если каждое решение $x \in H_{\text{co}}$ однозначно представимо в виде

$$x = v + Vz,$$

где $v \in \Psi(x)$, $z \in (\operatorname{co}\Phi)(x)$.

Будем говорить, что отображения $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \operatorname{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством B***, если эти отображения обладают свойством B, ядро оператора V состоит только из нулевого элемента, а множество H_{co} разложимо.

Теорема 2.4.6. *Пусть отображения* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \operatorname{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством* B^*. *Тогда* $H_{\text{ext}} \neq \varnothing$ *и справедливо равенство*

$$\overline{H}_{\text{ext}} = \overline{H} = H_{\text{co}}, \qquad (13)$$

где $\overline{H}_{\text{ext}}$, $\overline{H}$ *– замыкание множеств* H_{ext} *и* H *в пространстве* $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Отметим, что выполнение равенства (13) для включения (1) называют "бэнг-бэнг" принципом.

В заключении второй главы рассматривается включение с внешними возмущениями.

Обозначим через $K([a,b] \times [0,\infty))$ множество всех функций $\eta : [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих свойствами: при каждом $\delta \geqslant 0$ функция $\eta(\cdot,\delta) \in \mathbf{L}^1[a,b]$; для каждого $\delta \geqslant 0$ найдется такая функция $\beta_\delta(\cdot) \in \mathbf{L}^1[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\tau) \leqslant \beta_\delta(t)$; при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство $\lim\limits_{\delta \to 0+0} \eta(t,\delta) = 0$.

Обозначим через $P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$ множество всех непрерывных функций $\omega : \mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, для которых для любого $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$ справедливо соотношение $\omega(x,0)=0$.

Будем говорить, что отображение $\Delta(\cdot,\cdot)$ **при почти всех** $t\in[a,b]$ **непрерывно в точке** $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$, если для любой последовательности $x_i\in\mathbf{C}^n[a,b]$, $i=1,2,\ldots$ сходящейся к x в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ при $i\to\infty$, при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется равенство

$$\lim_{i\to\infty} h[\Delta(t,x);\Delta(t,x_i)]=0.$$

Если отображение $\Delta(\cdot,\cdot)$ при почти всех $t\in[a,b]$ непрерывно в каждой точке $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$, то будем говорить, что оно при почти всех $t\in[a,b]$ непрерывно на $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Далее будем считать, что отображение $\Delta(\cdot,\cdot)$, порождающее отображение $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, при почти всех $t\in[a,b]$ непрерывно на $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Рассмотрим оператор $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ и порождающее его отображение $\Delta:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Значения отображения $\Delta(\cdot,\cdot)$, а, следовательно, и образы оператора $\Phi(\cdot)$, могут вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать функцией $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $\Delta_\eta:[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, заданное равенством

$$\Delta_\eta(t,x,\delta)=(\Delta(t,x))^{\eta(t,\delta)}, \tag{14}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[0,\infty))$ в каждой точке $(t,x)\in[a,b]\times\mathbf{C}^n[a,b]$ при каждом фиксированном $\delta\in[0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значения порождающего отображения $\Delta(\cdot,\cdot)$, причем эти погрешности равномерны относительно переменной $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$. Далее, функцию $\eta(\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений порождающего отображения* $\Delta(\cdot,\cdot)$ или просто *радиусом внешних возмущений.*

Далее, определим отображение $\Phi_\eta:\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty)\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, заданное соотношением

$$\Phi_\eta(x,\delta)=\{y\in\mathbf{L}^n[a,b]:y(t)\in\Delta_\eta(t,x,\delta)\,\text{при п.в.}\,t\in[a,b]\}. \tag{15}$$

Пусть $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ и пусть функция $\omega(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$. Рассмотрим многозначное отображение $M_U(\omega) : U \times [0,\infty) \to 2^U$, определенное равенством

$$M_U(\omega)(x,\delta) = \overline{B_{\mathbf{C}^n[a,b]}[x,\omega(x,\delta)]} \cap U. \tag{16}$$

Определим отображение $\varphi_U(\omega) : [a,b] \times U \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ соотношением

$$\varphi_U(\omega)(t,x,\delta) = \sup_{y \in M_U(\omega)(x,\delta)} h[\Delta(t,x); \Delta(t,y)], \tag{17}$$

где отображение $M_U(\omega) : U \times [0,\infty) \to 2^U$ задано равенством (16).

Значение функции $\varphi_U(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке $(t,x,\delta) \in [a,b]\times U\times[0,\infty)$, на наш взгляд, естественно назвать *модулем непрерывности отображения* $\Delta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *в точке* (t,x) *по переменной* x *на множестве* U, функцию $\omega(\cdot,\cdot)$ – *функцией радиуса модуля непрерывности* или просто *радиусом непрерывности*, а саму функцию $\varphi_U(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot)$ – *функцией модуля непрерывности* или просто *модулем непрерывности отображения* $\Delta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *на множестве* U *относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot)$.

Пусть $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$. Будем говорить, что функция $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ **равномерно на множестве** $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ **оценивает сверху относительно радиуса непрерывности** $\omega(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$ **модуль непрерывности отображения** $\Delta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, **порождающего оператор** $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ и $\delta \in (0,\delta(\varepsilon)]$ выполняется неравенство

$$\varphi_U(\omega)(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,\varepsilon),$$

где отображение $\varphi_U(\omega) : [a,b] \times U \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ определено соотношением (17).

Пусть $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ и $\xi(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ для каждого $\delta > 0$ включение

$$x \in (\Psi(x))^{\xi(x,\delta)} + V\Phi_\eta(x,\delta), \tag{18}$$

где отображение $\Phi_\eta : \mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty) \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ задано соотношениями (14), (15).

Каждое решение включения (18) при фиксированном $\delta > 0$ будем называть δ – решением включения (1). Обозначим, через $H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$ – множество всех δ – решений включения (1), принадлежащих множеству $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$. Обозначим множества решений включений (1), (10), принадлежащих множеству $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$, через $H(U)$, $H_{\mathrm{co}}(U)$, соответственно.

Теорема 2.5.7. *Пусть U – непустое замкнутое множество пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$ и $\xi(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$, равномерно на множестве $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ оценивающей сверху относительно радиуса непрерывности $\omega(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$ модуль непрерывности отображения $\Delta : [a,b] \times \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, порождающее оператор $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, справедливо равенство*

$$H_{\mathrm{co}}(U) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)}$ – замыкание множества $H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$ в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Пусть $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$. Будем говорить, что для включения (1) на множестве $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ **выполняется принцип плотности (условие плотности)**, если справедливо равенство

$$\overline{H(U)} = H_{\mathrm{co}}(U).$$

Теорема 2.5.8. *Пусть $\xi(\cdot,\cdot) \in P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$. Если U – непустое замкнутое множество пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$, то для выполнения равенства*

$$\overline{H(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)} \tag{19}$$

для любого радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times [0,\infty))$ достаточно, а если U – непустое выпуклое компактное множество пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$, то и необходимо, выполнения принципа плотности на множестве $U \subset \mathbf{C}^n[a,b]$.

Отметим, что выполнение равенства (19) для любых внешних возмущений $(\eta(\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot)) \in K([a,b] \times [0,\infty)) \times P(\mathbf{C}^n[a,b] \times [0,\infty))$

является свойством устойчивости множества решений $H(U)$ включения (1) относительно этих возмущений.

Следствие 2.5.5. *Пусть отображения* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством* B. *Тогда для любых* $(\eta(\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot)) \in K([a,b]\times[0,\infty)) \times P(\mathbf{C}^n[a,b]\times[0,\infty))$ *выполняется равенство* (19) *на множестве* $U = \mathbf{C}^n[a,b]$.

Третья глава посвящена изучению краевой задачи для функционально-дифференциальных включений вида:

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x), \quad lx \in \varphi(x), \tag{20}$$

где $\mathcal{L} : \mathbf{D}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n[a,b]$, $l : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbb{R}^n$ – линейные непрерывные отображения, $\varphi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ – многозначный вектор - функционал.

В § 3.1 рассматривается вопрос о существовании, задачи (20), а также доказывается принцип плотности и "бэнг – бэнг" принцип для этой задачи. В § 3.2 рассматривается задача (20) с многозначным оператором Немыцкого. В § 3.3 исследована возмущенная задача (20).

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доценту Е.С. Жуковскому, профессору А.И. Булгакову и всем членам кафедры алгебры и геометрии Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Принцип плотности фундаментальное свойство возмущенных включений //Вестник ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. 2003. Т.8. Вып.3 С.351-352.

2 *Григоренко А.А.* О непрерывности многозначного оператора с выпуклыми по переключению значениями и порождающего его отображения // Вестник ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. 2003.Т8. Вып. 1. С.158.

3 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Квазилинейные краевые задачи функционально – дифференциальных включений //Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Воронеж. 2003. С. 44,45.

4 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* К теории возмущенных включений //"Понтрягинские чтения – 13"на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач". Тезисы докладов. Воронеж. 2002. С. 27-28.

5 *Григоренко А.А.* О реализации расстояний от точки до образа решений многозначного отображения возмущенных включений // Вестник ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. 2002. Т.7. Вып.1. С.31-33.

6 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Бэнг – бэнг принцип для квазилинейных краевых задач функционально-дифференциальных включений //Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Тезисы докладов. Воронеж. 2001. С.61.

7 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Возмущенное включение с нелинейным оператором //Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2001. №5. С. 31-33.

8 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Квазире-

шения возмущенных включений с нелинейным оператором //"Понтрягинские чтения - 12"на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач". Тезисы докладов. Воронеж. 2001. С.39.

9 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Об одной оценки решения возмущенного включения //"Понтрягинские чтения – 11"на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач". Тезисы докладов. Воронеж. 2000. С. 26.

10 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Бэнг – бэнг принцип для возмущенного включения с компактнозначным отображением //Вестник ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. 2000. Т.5. Вып. 4 С. 427-429.

11 *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Возмущенные включения с компактнозначным отображением //Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика 2000. №1. С. 33-40.

12 *Григоренко А.А.* О замыкании множества решений возмущенного включения //Симпозиум "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках". Тезисы докладов. Воронеж. 2000. С. 73.

13 *Григоренко А.А.* Существование экстремальных решений возмущенного включения //"Понтрягинские чтения – 11"на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач". Тезисы докладов. Воронеж. 2000. С. 43.

14 *Григоренко А.А.* Квазирешения крайних точек возмущенного включения //Международная конференция "Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения". Тезисы докладов. Воронеж. 2000. С. 83.

15 *Григоренко А.А.* Об одной оценки решений квазилинейных краевых задач функционально-дифференциальных включений // Вестник ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. 2000. Т.5. Вып. 4 С. 436-437.

16 *Григоренко А.А.* О существовании периодических экстремальных решений дифференциальных включений //Державинские чтения – 5. Материалы научн. конфер. преподавателей и аспирантов. Тамбов. 2000. С.25.

17 *Григоренко А.А.* О неустойчивости множества решений функционального включения с оператором типа Гаммерштейна //"Понтрягинские чтения - 10"на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач". Тезисы докладов. Воронеж. 1999. С. 49.

18 *Григоренко А.А.* Возмущение замкнутозначного оператора вызванное многозначным отображением типа Гаммерштейна //Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Тезисы докладов. Воронеж. 1999. С. 45.

Подписано к печати 04.11.2003.
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 0,93 усл. печ. л.: 1,0 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. С 423.

Отпечатано в издательско-полиграфическом центре
Тамбовского государственного технического университета